КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ
Физико-технический факультет
Кафедра Электроники и астрофизики

Алимгазинова Н.Ш.

Теоретические основы электротехники

для студентов, обучающихся по специальности
«Промышленная электроника и системы управления»

Алматы, 2025

7 лекция. Переходные процессы в линейных электрических цепях

Цель лекции. Изучить причины возникновения переходных процессов в электрических цепях, законы коммутации и классические методы их анализа; сформировать умения рассчитывать переходные процессы в цепях с индуктивными и ёмкостными элементами.

План
1. Общие понятия. Возникновение переходных процессов
2. Законы коммутации.
3. Классический метод.

1. Общие понятия. Возникновение переходных процессов

Переходным процессом *(ПП) называют процессы перехода от одного режима работы ЭЦ (обычно периодического) к другому (обычно также периодическому), чем-либо отличающемуся от предыдущего, например, величиной амплитуды, фазы, формой или частотой действующей в схеме ЭДС, значениями параметров схемы, а также вследствие изменения конфигурации цепи.*

Периодическими режимами являются режимы синусоидального и постоянного тока, а также режим отсутствия тока в ветвях цепи.

Переходные процессы называют ***коммутацией*** в цепи. ***Коммутация*** – *то процесс замыкания или размыкания ключей.*

а)замыкание ключа *б) размыкание ключа*

Рисунок 1 – Коммутация

Физически ПП представляют собой процессы перехода от энергетического состояния, соответствующего докоммутационному режиму, к энергетическому состоянию, соответствующему послекоммутационному режиму. ПП быстротечны, длительность их составляет десятые, сотые и менее доли секунды, однако их изучение весьма важно, т.к. оно дает возможность установить, как *деформируется по форме и амплитуде сигналы* при прохождении их через усилители, фильтры и другие устройства, позволяет *выявить превышение напряжений* на отдельных участках цепи, которые могут оказаться опасными, *для изоляции установки*, *увеличения амплитуд токов*, которые могут в десятки раз превышать амплитуду тока установившегося периодического процесса, а также определить продолжительность ПП.

Для расчета переходных процессов в электрических цепях широко используют пять основных методов расчета: *классический, операторный,* *частотный, метод расчет с помощью интеграла Дюамеля и метод переменных состояния.*

***Классический метод** заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи.* Данные уравнения составляются по законам Кирхгофа для узлов и контуров.

***Операторный метод** заключается в решении системы алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных с последующим переходом от найденных изображений к оригиналам.* Оригиналы – первоначальные функции переменных, изображения – функции переменных, преобразованные в операторный вид. Используются преобразования Лапласа и законы Киргофа.

***Частотный метод** основан на преобразовании Фурье.* Он находит широкое применение при решении задач синтеза.

***Метод расчет с помощью интеграла Дюамеля** используется при сложной форме кривой возмущающего действия.*

***Метод переменных состояния** представляет собой упорядоченный способ определения электромагнитного состояния цепи на основе решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме (форме Коши).*

Общие этапы применения методов:

1. <u>Выбирают положительные направления токов в ветвях электрической цепи.</u>

Определяют также количество узлов, ветвей и независимых контуров.

2. <u>Определяют начальные условия: значения токов и напряжений непосредственно до коммутации</u>.

В электрических цепях для анализа переходных процессов определяют *независимые и зависимые, нулевые и ненулевые, основные и неосновные начальные значения токов и напряжений*.

***Независимые начальные условия** - значения всех токов, протекающих через индуктивности и напряжений на конденсаторах в докоммутационной схеме.*

***Зависимые начальные условия** - значения всех остальных токов и напряжений, при $t = 0_+$ в послекоммутационной схеме, которые определяются по независимым начальным значениям из законов Кирхгофа.*

***Нулевые начальные условия** – если к началу переходного процесса непосредственно перед коммутацией все токи и все напряжения на пассивных элементах электрической цепи равны нулю.*

***Ненулевые начальные условия** – если к началу переходного процесса хотя бы часть токов и напряжений в электрической цеп и не равны нулю.*

Для сложных электрических цепей со множеством накопителей энергии различают основные и неосновные независимые начальные значения. ***Основные независимые начальные значения** – токи в индуктивных элементах и напряжения на емкостных элементах, которые могут быть* *заданы независимо от других. К* ***неосновным независимым начальным значениям относят*** *все остальные.*

Величины токов и напряжений в период времени $t = 0_-$, т.е. непосредственно до коммутации являются ***докоммутационными начальными значениями***. В период времени $t = 0_+$, т.е. непосредственно после коммутации значения токов и напряжений называются ***послекоммутационными начальными значениями***.

3. <u>Составляют характеристическое уравнение и определяют его корни</u>.

Здесь рассматривается послекоммутационная схема. Для полных токов и напряжений по законам Кирхгофа составляют уравнения, определяющие электромагнитное состояние цепи. Определяют неизвестные величины.

4. <u>Получают выражения для искомых токов и напряжений как функции времени.</u>

Рассмотрим схему, представленную на рисунке 2. Запишем для данного контура второй закон Кирхгофа:

$$u_L + iR = e,$$

$$L\frac{di}{dt} + iR = e, \qquad (1)$$

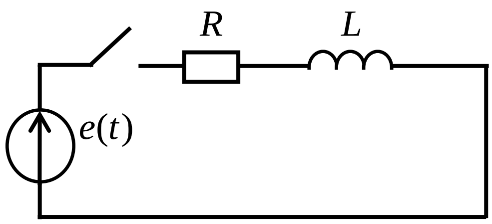

Рисунок 2

Общее решение (1) складывается из решений в частном и в однородном случаях. Частным решением уравнения будет результат $i = E/R$, где E- постоянная составляющая ЭДС. Однородное уравнение можно получить, если приравняем правую часть (1) к нулю:

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0 \qquad (2)$$

Решением уравнения (2) будет $i = Ae^{pt}$, где A и p есть некоторые коэффициенты, не зависящие от времени.

Примем $t = 0$, это время соответствует моменту коммутации, тогда $A = \dfrac{E}{R}$, $p = -\dfrac{R}{L}$ и общее решение уравнения (1) примет вид

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (3)$$

Первое слагаемое - частное решение неоднородного уравнения, которое называют ***принужденной составляющей*** величины (тока или напряжения), второе слагаемое - общее решение однородного уравнения - есть ***свободная составляющая*** величины (тока или напряжения). Тогда

$$i = i_{np} + i_{cв} \qquad (4)$$

Помимо индексов *«пр»* и *«св»* величины (ток или напряжение) могут иметь индексы, соответствующие номерам ветвей.

Принужденная составляющая величины *(тока или напряжения) физически представляет собой составляющую, изменяющуюся с той же частотой, что и действующая в схеме принуждающая ЭДС.* Если ЭДС изменяется по гармоническому закону, то расчет принужденной составляющей производится с использованием символического метода, а если ЭДС имеет постоянную величину обычно используют известные методы расчета цепей постоянного тока.

В цепях с источниками постоянной ЭДС постоянный ток не проходит через емкостной элемент, поэтому принужденная составляющая тока $i_{np} = 0$. Принужденная составляющая напряжения на индуктивном элементе при постоянном токе будет $u_{np} = 0$.

Свободная составляющая величины *(тока или напряжения) физически представляет собой составляющую свободную от вынуждающей силы.* Свободная составляющая есть решение однородного уравнения (2). В линейных электрических цепях свободные составляющие токов и напряжений затухают во времени по показательному закону e^{pt}.

Полный ток i - *ток, который в действительности протекает по той или иной ветви цепи при переходном процессе.* ***Полное напряжение*** u - *напряжение, которое в действительности имеется между некоторыми точками электрической цепи при переходном процессе.*

Значения полного тока и полного напряжения можно записать и измерить. Принужденные и свободные составляющие токов и напряжений во время переходного процесса играют вспомогательную роль. Они являются расчетными компонентами, которые в сумме дают действительные величины полного тока и напряжения.

При любых переходных и установившихся процессах соблюдают два основных положения: ток, проходящий через индуктивный элемент и напряжение на емкостном элементе не могут изменяться скачком.

Рассмотрим цепь, представленную на рисунке 2, примем, что ток и ЭДС могут принимать конечные значения. Допустим, что в уравнении (1) ток i

может измениться скачком. Скачок тока означает, что за бесконечно малый интервал времени $\Delta t \to 0$ ток изменится на конечную величину Δi, тогда

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} \to \infty .$$

Если в уравнение (1) вместо «$L\frac{di}{dt}$» подставить «∞», тогда левая часть не будет равна правой и второй закон Кирхгофа не будет выполнен. Следовательно, допущение о возможности скачкообразного изменения тока, протекающего через индуктивный элемент, противоречит второму закону Кирхгофа.

Ток, протекающий через индуктивный элемент не может измениться скачкообразным способом, но напряжение на данном элементе равное $L\frac{di}{dt}$ *может измениться скачком.*

Рассмотрим цепь, представленную на рисунке 3.

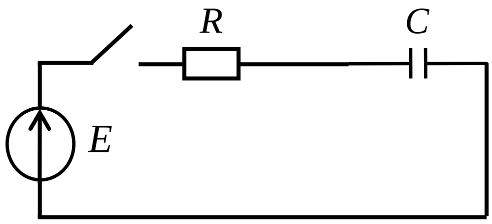

Рисунок 3

По второму закону Кирхгофа

$$iR + u_C = E$$

здесь $i = \frac{dq}{dt}$, $q = u_C C$, следовательно

$$i = C\frac{du_C}{dt},$$

тогда

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E . \qquad (5)$$

Если допустить, что u_C может измениться скачкообразным способом, тогда

$$\frac{\Delta u_C}{\Delta t} \approx \frac{du_C}{dt} \to \infty$$

и левая часть уравнения (5) не будет равна правой. Таким образом, это также противоречит второму закону Кирхгофа.

Напряжение на емкостном элементе не может измениться скачкообразным способом, но ток, протекающий через данный элемент, равный $C\dfrac{du_C}{dt}$ *может измениться скачком.*

2. Законы коммутации

Из вышеизложенного следуют два закона коммутации.

Первый закон коммутации:

Ток, протекающий через индуктивный элемент непосредственно до коммутации $i_L(0_-)$ ***равен току, протекающему через тот же индуктивный элемент непосредственно после коммутации*** $i_L(0_+)$***:***

$$i_L(0_-) = i_L(0_+). \qquad (6)$$

Время $t = 0\_$ представляет собой время непосредственно до коммутации, $t = 0$ - время в момент коммутации, $t = 0_+$ - время в первый момент после коммутации.

Второй закон коммутации:

Напряжение на емкостном элементе непосредственно до коммутации $u_C(0\_)$ ***равно напряжению на том же емкостном элементе непосредственно после коммутации*** $u_C(0_+)$***:***

$$u_C(0\_) = u_C(0_+). \qquad (7)$$

3. Классический метод

Это метод расчета переходных процессов, в котором решение дифференциального уравнения представляет собой сумму принужденной и свободной составляющих. Определение постоянных интегрирования, входящих в выражение для свободного тока (напряжения), производят путем совместного решения системы линейных алгебраических уравнений по известным значениям корней характеристического уравнения, а также по известным значениям свободной составляющей тока (напряжения) и её производных, взятых при $t = 0_+$, т.е. непосредственно после коммутации.

Рассмотрим применение классического метода расчета на примере электрической цепи, представленной на рисунке 4.

1. Данная цепь содержит индуктивный и емкостной элементы, имеет $m = 2,\ \ n = 3,\ \ n_{ИТ} = 0,\ \ k = n - m - n_{ИТ} + 1 = 2.$ В ветвях цепи протекают токи i_L, i, i_C.

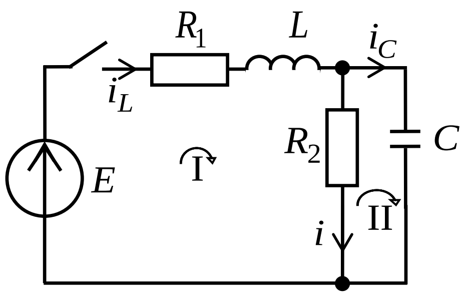

Рисунок 4

2. Заданы нулевые начальные условия, так в период до коммутации все значения токов и напряжений равны нулю.

Так как в первой ветви разрыв в ключе

$$i_L(0\_) = 0,$$

а по первому закону Кирхгофа

$$i_L(0\_) = i + i_C$$

и через емкостной элемент не протекает постоянный ток (т.к. $E = const$), т.е. $i_C(0\_) = 0$, следовательно, и $i(0\_) = 0$. Напряжение на емкостном элементе определяется из уравнения

$$u_C(0\_) = i(0\_) \cdot R_2,$$

тогда

$$u_C(0\_) = 0.$$

3. Теперь рассмотрим послекоммутационную схему. По законам Кирхгофа составим уравнения, описывающие электромагнитное состояние цепи

$$\begin{cases} i_L - i - i_C = 0, \\ i_L R_1 + L\dfrac{di_L}{dt} + iR_2 = E, \\ \dfrac{1}{C}\int i_C dt - iR_2 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Запишем первые два уравнения (8) для принужденных составляющих тока

$$\begin{cases} i_{L\text{пр}} - i_{\text{пр}} - i_{C\text{пр}} = 0, \\ i_{L\text{пр}} R_1 + L\dfrac{di_{L\text{пр}}}{dt} + i_{\text{пр}} R_2 = E. \end{cases} \tag{9}$$

Учитывая, что $i_{C\,пр}=0$, $u_{L\,пр}=L\dfrac{di_{L\,пр}}{dt}=0$, получим

$$\begin{cases} i_{L\,пр}-i_{пр}=0, \\ i_{L\,пр}R_1+i_{пр}R_2=E. \end{cases} \tag{10}$$

Тогда

$$i_{L\,пр}=i_{пр}=\frac{E}{R_1+R_2}.$$

Таким образом, мы определили принужденные составляющие тока. Для определения свободных составляющих токов запишем (8) в следующем виде

$$\begin{cases} i_{L\,св}-i_{св}-i_{C\,св}=0, \\ i_{L\,св}R_1+L\dfrac{di_{L\,св}}{dt}+i_{св}R_2=0, \\ \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_{C\,св}dt-i_{св}R_2=0. \end{cases} \tag{11}$$

Преобразуем систему уравнений (11) в алгебраическую форму. Учтем, что

$$i_{св}=Ae^{pt},$$

тогда

$$L\frac{di_{L\,св}}{dt}=L\frac{d}{dt}\left(Ae^{pt}\right)=Lp\left(Ae^{pt}\right)=Lp\cdot i_{L\,св}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{C}\int i_{C\,св}dt=\frac{1}{C}\int Ae^{pt}dt=\frac{1}{Cp}\cdot Ae^{pt}=\frac{1}{Cp}\cdot i_{C\,св}. \tag{13}$$

Система уравнений по законам Кирхгофа, записанных для свободных составляющих токов

$$\begin{cases} i_{L\,св}-i_{св}-i_{C\,св}=0, \\ i_{L\,св}R_1+Lpi_{L\,св}+i_{св}R_2=0, \\ \dfrac{1}{Cp}i_{C\,св}-i_{св}R_2=0. \end{cases} \tag{14}$$

Составим определитель системы (14) и приравняв его к нулю получим ***характеристическое уравнение***

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 + Lp & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & \dfrac{1}{Cp} \end{vmatrix} = 1 \cdot R_2 \cdot \frac{1}{Cp} + R_2\left(R_1 + Lp\right) + \left(R_1 + Lp\right)\frac{1}{Cp} = 0,$$

$$p^2 LCR_2 + p(CR_2R_1 + L) + \left(R_1 + R_2\right) = 0. \qquad (15)$$

Обычно ***степень характеристического уравнения*** *равно числу основных независимых начальных значений в послекоммутационной схеме после максимального её упрощения и не зависит от вида ЭДС источников ЭДС в схеме*

$$\nu = n_L + n_C - m_L - k_C, \qquad (14.16)$$

n_L - число индуктивностей в схеме, n_C- число емкостей, m_L- число индуктивностей, токи в которых не могут быть заданы произвольно (или же это число узлов, в которых сходятся только ветви, содержащие катушки индуктивности), k_C - число емкостей, напряжения на которых не могут быть заданы произвольно (или же число контуров схемы, ветви которых содержат только конденсаторы).

✓ Если характеристическое уравнение цепи представляет собой уравнение первой степени, тогда параметр затухания имеет одно значение, которое одинаково для всех токов ветвей схемы, т.е. вся цепь, охвачена единым переходным процессом и уравнение для свободной составляющей тока

$$i_{св} = Ae^{pt}. \qquad (17)$$

Постоянная интегрирования A определяется по значению свободного тока при $t = 0$

$$i_{св}\left(0\right) = A. \qquad (18)$$

✓ Если дано характеристическое уравнение второй степени и его корни действительны и не равны, то

$$i_{св} = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}.$$

Продифференцируем уравнение по времени

$$i'_{св} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$$

и запишем уравнения при $t = 0$, тогда получим

$$\begin{cases} i_{св}(0) = A_1 + A_2 \\ i'_{св}(0) = A_1 p_1 + A_2 p_2 \end{cases},$$

здесь $i_{св}(0)$, $i'_{св}(0)$, p_1, p_2 - известные величины. Совместное решение последней системы уравнений даст значения постоянных интегрирования

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{i'_{св}(0) - p_2 i_{св}(0)}{p_1 - p_2}, \\ A_2 = i_{св}(0) - A_1. \end{cases} \qquad (19)$$

✓ Если корни характеристического уравнения являются комплексно-сопряженными, то

$$i_{св} = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu),$$

где ω_0 - циклическая частота и коэффициент затухания δ известны из решения характеристического уравнения. Определение неизвестных A и ν производят и в этом случае по значениям $i_{св}(0)$, $i'_{св}(0)$. Дифференцируя последнее уравнение получим

$$i'_{св} = -A\delta e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu) + -A\omega_0 e^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \nu).$$

При $t = 0$

$$\begin{cases} i_{св}(0) = A\sin(\nu) \\ i'_{св}(0) = -A\delta\sin(\nu) + -A\omega_0\sin(\nu) \end{cases}$$

определяется значение постоянной интегрирования A и параметра первоначальной фазы ν.

Так как характеристическое уравнение (15) является квадратным, то параметр затухания имеет два значения p_1, p_2 и значения постоянных интегрирования определяются по формулам (19).

4. Полные токи в ветвях рассматриваемой цепи

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_{L\,пр} + i_{L\,св}, \\ i(t) &= i_{пр} + i_{св}, \\ i_C(t) &= i_{C\,пр} + i_{C\,св}. \end{aligned} \qquad (20)$$

Этапы применения классического метода расчета переходных процессов:

1. Выбирают положительные направления токов в ветвях электрической цепи.
2. Определяют начальные условия: значения токов и напряжений непосредственно до коммутации.
3. Составляют систему уравнений по законам Кирхгофа.
4. Определяют принужденные значения токов и напряжений в цепи.
5. Записывают систему уравнений для свободных составляющих токов. Составляют характеристическое уравнение и определяют его корни.
6. Получают выражения для искомых токов и напряжений как функции времени в виде суммы принужденной и свободной составляющих.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение переходному процессу.
2. Объясните законы коммутации.
3. Расскажите о методике расчета переходных процессов.
4. Объясните этапы применения классического метода расчета переходных процессов.

Литература

1 Алимгазинова Н.Ш. Теория Электрических Цепей. Курс Лекций. – Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 8,7 п.л..

2 Манаков С.М., Алимгазинова Н.Ш., Бурисова Д.Ж., Исимова А.Т. Основы электротехники в упражнениях и задачах. – Алматы: Қазақ университеті, 2016. –10 п.л..

3 Манаков С.М., Алимгазинова Н.Ш., Толегенова А.А. Учебно-Методическое Пособие По Курсу "Теория Электрических Цепей". – Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 12 п.л.

4 Теоретические основы электротехники. Версия 1.0 [Электронный ресурс]: конспект лекций / С. Г. Иванова, В. В. Новиков. – Электрон. дан. (4 Мб). – Красноярск: ИПК СФУ, 2008.

5 Атабеков Г. И. Основы теории цепей : учебник / Г. И. Атабеков . – 2-е изд., испр . – СПб. : Лань, 2006 . – 432 с.

6 Прянишников В.А. Теоретические основы электротехники. М: КОРОНА-Век, 2012. - 368 с.

7 Атабеков Г.И. Нелинейные электрические цепи. Теоретические основы электротехники. Учебное пособие. СПб.: Питер, Лань, 2010. – 432 с.

8 Бессонов Л.А. Электрические цепи. Теоретические основы электротехники. М: Юрайт, 2016. – 701 с.

9 Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для студ. вузов спец. Радиотехника. – М.: Высшая школа, 2000. – 574 с.